

EXERCICE 1 (5 points)

Une observation faite par un journal sur ses abonnés a permis de constater, pour chaque année un taux de réabonnement de 80% ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1-/ Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,8a_n + 5000$. [1pt]

2-/ Soit (U_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 25000 - a_n$.

a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n . [1 pt]

b) Dédire que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. [1pt]

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n . En déduire l'expression de a_n en fonction de n . [1pt].

3-/

a-/ Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $25\,000 - 15\,000 \times (0,8)^x > 22\,000$. [0,5pt].

b-/ En déduire le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000. [0,5pt].

EXERCICE 2..... (5 points)

A-/ Une population comprend n hommes et n femmes.

On choisit au hasard un échantillon de n personnes. On appelle x la variable aléatoire égale au nombre de femmes obtenues.

1-/ Déterminer $x(\Omega)$ ensemble des valeurs prises par x . [0,5pt].

2-/ Déterminer la loi de probabilité de x . [0,5pt].

En déduire la relation : $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. [0,5pt].

3-/ On suppose ici $n = 5$, calculer l'espérance de x , sa variance et son écart type. [0,75pt].

B-/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On considère la parabole (\mathcal{P}) d'équation : $y^2 = 8x$.

1-/ a/ Préciser les éléments caractéristiques de (\mathcal{P}) (paramètre, Sommet, foyer et directrice). [0,75pt].

b-/ Construire (\mathcal{P}) et ses éléments caractéristiques. [0,5pt].

2-/ Ecrire l'équation de la tangente à (\mathcal{P}) au point A (2 ; 4). [0,5pt].

C-/ Soient les points A , B, C d'affixes respectives 1, i et $-i$. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre B et qui associe le point A au point C. Caractériser la similitude S. [1pt].

Problème (10 points)

On considère les fonctions numériques f_m de la variable réelle x définie par $f_m(x) = e^{x-1} - mx$, où m est un paramètre réel. On désigne par (\mathcal{C}_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).

1-/ Montrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées. [1,5pt].

2-/ Montrer que la droite (Δ_m) d'équation : $y = -mx$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}_m) et déterminer la position de cette droite par rapport à (\mathcal{C}_m) . [2pts].

3-/ Etudier la fonction f_1 et tracer avec soin la courbe (\mathcal{C}_1) dans le repère. [3pts].

4-/ Soit g_1 la restriction de f_1 à $[1 ; +\infty[$. Montrer que g_1 admet une réciproque $(g_1)^{-1}$. Représenter la courbe de $(g_1)^{-1}$. [2pts].

5-/ Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ de la portion du plan limitée par (\mathcal{C}_1) , la droite $\Delta_1 : y = -x$, et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \alpha$, ($\alpha < 1$). [1,5pt].