

SERIES:

SBT / TSExp

Exercice 1 :(6 points)

\mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes.

1) Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iy = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1 + i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$

2) (x, y, z) étant la solution du système ci-dessus ; on désigne par A, B, C les points du plan d'affixes respectives x, y et z .

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z - x}{z - y}$

b) En déduire la nature du triangle ABC puis le construire dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3) Calculer $\int_0^2 \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x + 1} \right) dx$

4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Déterminer la solution particulière f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 2 :(4 points)

1) (U_n) est une suite arithmétique définie par $U_3 = 2$ et $U_7 = 14$

a) Déterminer la raison r de cette suite, puis exprimer U_n en fonction de n .

b) Calculer $S = U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{20}$.

2) Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard 5 boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages contenant :

a) 3 boules rouges et 2 boules blanches.

b) 3 boules blanches et 2 boules rouges.

c) Résoudre dans \mathbb{N} l'équation : $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$.

Problème :(10 points)

1) On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Calculer les limites aux bornes de \mathcal{D}_f et étudier les variations de f .
- Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $g(x) = |x-1| \times \ln x$

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_g de g et écrire $g(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier les variations de g (on utilisera la question 1°)
- La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? si oui, calculer $g'(1)$.
- Tracer la courbe (\mathcal{C}) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

3) a) Prouver que g réalise une bijection de \mathbb{R} , sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse.

4) Représenter dans le même repère que (\mathcal{C}) la courbe (\mathcal{C}') de g^{-1} .

5) a) Hachurer le domaine plan (\mathcal{D}) limité par la courbe (\mathcal{C}) de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine (\mathcal{D}).