

SERIES: SBT / TSExp

EXERCICE 1 : (6 points)

1- Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1} dx$

b) $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 2) dx$

c) $\int_0^1 (2x+1) e^{(x^2+x+2)} dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 3 \sin x \cos x) dx$

2- a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 8z + 25 = 0$.

b) Effectuer $(1 + 2i)^4$.

c) Déterminer et représenter les racines quatrièmes du nombre complexe :
 $z = -7 - 24i$.

Les racines quatrièmes de l'unité sont : $1 ; i ; -1 ; -i$.

EXERCICE 2 : (4 points)

1- Résoudre les systèmes :

a) $(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} 5e^x + e^y = 4 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases}$

b) $(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

c) $(x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \begin{cases} 2 \ln x - \ln y = 0 \\ 4 \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

2- a) Donner la solution générale de l'équation différentielle: (E) : $y'' + 4y = 0$

b) Déterminer la solution particulière f de (E), telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$.

PROBLEME : (10 points)

f et g sont deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

On désigne respectivement par (C) et (H) les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 4 cm.

A

1- a) Prouver que $f'(x)$ est du signe de $-4 \ln x$ sur les intervalles $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Préciser les droites asymptotes à (C) .

2- Etudier la position de (C) par rapport à la l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente à (C) au point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

3- Calculer l'intégrale $\int_1^2 g(t) dt$

4- Construire (C) et (H) .

B

1- Démontrer que la position relative des courbes (C) et (H) peut se déduire du signe de : $h(x) = 1 + 2 \ln x - x$.

2- En utilisant les variations de la fonction h , prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une

Solution unique dans chacun des intervalles $]0 ; 2[$ et $]2 ; +\infty[$.

On note α la solution appartenant à l'intervalle $]2 ; +\infty[$; justifier l'encadrement

$$3 < \alpha < 4 .$$

3- Préciser le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x , et conclure sur la position relative des courbes (C) et (H) .

4- Calculer les intégrales : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\ln 2} (-4e^{2x} + 8e^x) dx$. Où α est un réel strictement inférieur à $\ln 2$.