EXERCICE 1 : (5 points)

1- a) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (1 - i) z^2 + z - 1 + i = 0$
Sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.

b) dans le plan complexe ($\mathscr{P}$), les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A, B, C. Placer ces points dans ($\mathscr{P}$).

c) Déterminer le nombre complexe z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

2- Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3.

3- a) Calculer $(2 + i)^2$.

b) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $i z^2 - i z - 1 + i = 0$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1- On considère l'application polynôme P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24.$$

a) Vérifier que P (8) = 0.
b) Ecrire P (x) sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
c) En déduire la résolution de l'inéquation : ($x \in \mathbb{R}$) , $P(x) \leq 0$.

2- En utilisant les résultats de la question 1- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) L'équation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 = 0$.

b) L'inéquation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 \leq 0$.

c) L'équation : $2^{3x} - 4.2^{2x} - 29.2^{x} - 24 = 0$.

3- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{-2 ; 1/3\}$ par :

$$f(x) = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

a) Vérifier que : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$.

b) En déduire les primitives de f sur $\mathcal{D}$.

4- On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}$$

a) Prouver que, pour tout n, on a : $U_n > 0$.

b) On introduit la suite (V_n), $n \in \mathbb{N}$ de terme général : $V_n = \frac{1}{U_n}$.

c)Prouver que la suite (V_n) est une suite arithmétique.

d) En déduire V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

e) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (Un).

f) Pour quelles valeurs de x a–t–on : $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(2-x)} = U_0$?

PROBLEME : (10 points)

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$.

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$

1- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2- a) Prouver que la droite (Δ_1) d'équation : y = x + 2 est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_1).

3- a) Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$

b) En déduire que la droite (Δ_2) d'équation : y = x – 2 est asymptote à la courbe(C) en $+\infty$.

c) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_2).

4- a) prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.

5- Tracer les droites (Δ_1) et (Δ_2), puis la courbe en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

6- Déterminer l'ensemble des primitives f de sur $\mathbb{R}$**.**