

SERIES: SBT / TSExp

EXERCICE 1 : (5 points)

1 a) Linéariser : $A = \cos^2 x + \sin^3 x$; $B = \cos^4 x$

b) En déduire : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B dx$

2 Soit f l'application, de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2} z^3 - 4\sqrt{2} z - 16.$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z , on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $f(z) = 0$.

c) Déterminer les réels r et θ tels que $[r ; \theta] = 1 + i$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1- (U_n) est une suite géométrique de raison 3 et $U_1 = 2$.

a) Calculer U_n en fonction de n

b) Calculer la somme $U_1 + U_2 + \dots + U_7$.

c) (V_n) est une suite arithmétique de raison r et $V_1 = 2$.

Exprimer V_n en fonction de n puis calculer : $V_{30} + V_{31} + V_{32}$.

2- Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' + 5y = 0$

b) $y'' + 9y = 0$

c)

3- a) Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

b) En déduire l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{4}} \cos 2x dx$

4- Résoudre

a) L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$.

b) L'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x-3) + \ln(x-1) < \ln(2x+3)$.

PROBLEME : (10 points)

A

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$.

- 1- Démontrer qu'il existe des réels a, b, c tels que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$.
- 2- a) Calculer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f .
c) Étudier la position relative de (C) et (d).
- 3- Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 4- a) Déterminer les coordonnées des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite (d).
b) Déterminer une équation de ces tangentes.
c) Démontrer que le point $I\left(0; \frac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C).
- 5- Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$; l'unité graphique est 1 cm. Tracer la courbe (C) et son asymptote (d).

B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2\ln(x^2 + 1)$.

- 1- Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} qui s'annule en zéro.
- 2- a) Démontrer que -1 est la seule racine de $f(x)$.
b) En déduire les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .
c) Calculer les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.
- 3- Soit un nombre réel α , $\alpha \geq 0$;
a) Calculer en fonction de α , l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $0 \leq x \leq \alpha$ et $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \leq y \leq f(x)$.
b) Pour quelles valeurs de α a-t-on : $A(\alpha) \leq 1$?
c) Ecrire 2^x sous la forme e^{kx} , $k \in \mathbb{R}$.