SERIES: SBT / TSExp

EXERCICE 1 : (5 points)

Dans un sac contenant 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard trois boules.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) Aucune boule rouge n'est tirée ;

b) Une boule rouge et une seule est tirée ;

c) Deux boules rouges et deux seulement sont tirées ;

d) Une boule rouge au moins est tirée.

2) Soit x la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées. Donner la loi de probabilité de x.

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\ x\ \ dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4\ x\ \ dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, sin^2\ x\, cos^2\ x\ \ dx$.

1) Calculer $I + J + K$ et $I - J$.

2) Exprimer cos4x en fonction de sinx et cosx.

3) Déduire de 1) et 2) la valeur de $I + J - 3K$ et celles de $I\, ;\ J\ et\ K$.

PROBLEME : (10 points)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes, soit f : $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

1°) Calculer f (i) et en déduire que f (z) peut s'exprimer comme produit d'un polynôme du premier degré par un polynôme du second degré de la variable z.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation f (z) = 0

Calculer le module et un argument de chaque solution de l'équation.

3°) On désigne par z_1, z_2, et z_3 les racines de l'équation f (x) = 0 ; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Etablir que z_1 ; z_2 ; et $-\frac{1}{2}z_3$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on donnera la raison.

b) Calculer la somme S_n des n premiers termes de cette suite.

4°) On considère la suite (Un), $n \in \mathbb{N}$, définie par :

$U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2U_{n+1} = U_n + 1$.

a) Montrer que la suite de terme général $V_n = U_n - 1$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q.

b) Exprimer U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

c) Calculer $\sum_{i=0}^{n} U_i$.