Exercice 1 (5 points)

Pour lancer un nouveau produit P sur le marché, une société de la place effectue un sondage auprès des éventuels clients. Dans le tableau ci-dessous :
x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en centaines de francs CFA ;
y représente la quantité du produit P demandée en millier.

Prix de vente unitaire x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25

Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques :
1 cm pour une centaine de francs CFA sur l'axe des abscisses;
2 cm pour un millier sur l'axe des ordonnées.

1. a) Représenter graphiquement le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$.
   b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier la réponse.
2. On effectue le changement de variable suivant : $w_i = ln y_i$ où ln désigne la fonction logarithme népérien :
   a) Recopier et compléter le tableau suivant :
   (les valeurs de w_i seront arrondies à 10^{-4} près)

x_i	3	3,5	4,5	6,5	8	10
$w_i = ln y_i$						

   b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i; w_i)$.
   c) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de w en x.
   d) En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que : $y = \alpha.\beta^x$.
   Donner les valeurs approchées de α et β à 10^{-3} près.
   Déterminer une estimation de la demande y en fonction du prix x.
   e) En supposant que cette tendance est maintenue, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont près à acheter si le prix de vente unitaire est fixé à 15 centaines de francs CFA.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. On désigne par K le point d'affixe $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer les coordonnées de K.
2. Soit α un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \frac{2}{3}cos\alpha$.
3. a) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') : $z^4 - 2(cos\alpha)z^2 + 1 = 0$.
   (On donnera les solutions sous forme exponentielle).
   b) Vérifier que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées.
   c) Décomposer le polynôme à variable réelle x défini par : $P(x) = x^4 - 2(cos \propto)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

4. On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $2\left(z-\frac{1}{3}\right)=(1+i)\left(z'-\frac{1}{3}\right)$.
   a) Démontrer que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b) Démontrer que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Problème (10 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I=]0; +∞[par :
$f(x)=\frac{1}{x^2}(x+lnx)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit h la fonction définie sur I par : $h(x)=-x+1-2lnx$.

1. Calculer les limites de h aux bornes de I.
2. Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
3. Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ pour tout x élément de I.

Partie B : Etude d'une fonction.

1. a) Calculer les limites de f aux bornes de I.
   b) Montrer que : $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$
   c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur I et que l'on a : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle [1 ; +∞ [.
   a) Démontrer que g réalise une bijection de [1 ; +∞ [sur un intervalle J à préciser. On désigne par g^{-1} l'application réciproque de g.
   b) Résoudre dans J l'équation $g^{-1}(x)=e$.
   c) Calculer $(g^{-1})'(e^{-2}+e^{-1})$
4. Construire la courbe (C) et la courbe de (Γ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C : Mouvement d'un point

Dans le repère ci-dessus, un point mobile M a pour coordonnées:
$\begin{cases} x &= e^t \\ y &= e^{-t}+te^{-2t} \end{cases}$; $t\in[0\,;+\infty[$

1. Démontrer que la trajectoire de M est une partie de (C) à préciser.
2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse de M à l'instant t.
3. Représenter ce vecteur vitesse à l'instant $t = 0$